TITLE:

Locality of structure of monotone matrix functions and convex matrix functions(Recent Developments in Linear Operator Theory and its Applications)

AUTHOR(S):

富山, 淳

CITATION:

富山, 淳. Locality of structure of monotone matrix functions and convex matrix functions(Recent Developments in Linear Operator Theory and its Applications). 数理解析研究所講究録 2005, 1458: 10-15

ISSUE DATE:

2005-12

URL:

http://hdl.handle.net/2433/47906

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1458 巻 2005 年 10-15

Locality of structure of monotone matrix functions and convex matrix functions

東京都立大学名誉教授　　富山　淳 (Jun Tomiyama)
Prof.Emeritus of Tokyo Metropolitan Univ.

1　はじめに

自明でない区間 I で定義された $n\times n$ 行列環 M_n　上の作用素単調〔作用素凸〕な関数全体を夫々 $P_n(I), K_n(I)$ と書き n-matrix monotone, n-matrix convex な関数と呼ぶことにする。I 上の（実数値連続）関数が任意の n について $P_n(I)$ (resp.$K_n(I)$) に入るときそれは作用素単調な関数とクラス $P_\infty(I)$ (resp. 作用素凸な関数のクラス $K_\infty(I)$) になることは良く知られている．

さて通常の解析学において C^∞ 関数、解析関数のクラスの重要性は勿論であるが、それらの元となるクラス C^n の関数類の重要さも無視できないのは当然であろう。そしてテイラー展開も含めてクラス C^n 関数の其の先の関数類へのつながり等を我々は解析学の基盤として学んでいる。これと同様に作用素単調関数、作用素凸関数の理論も単にそれらだけの議論がすべてであるとは言い得ないであろう。筆者は更に作用素行列関数類の"積み重ね"の理論は作用素環の matricial structure の理論の非線形版とみなしている．この稿では理論の基本構成要素としての　$\{P_n(I)\},\{K_n(I)\}$ の"積み重ね"の構造について最近の H.Osaka,S.Silvestrov との共同また F.Hansen との共同研究で得られた結果（の一部）の概略を述べる．

2　行列単調、行列凸関数の判定条件

"積み重ね"の理論は 1934 年の Loewner, '37 年の Dobsch の研究以来 70 年余りの年月がたち其の間に多くの論文が出版されているのにも拘わらずその数学的土台は以下に見られるように非常に脆弱であったのは驚

くほか無い。ここで簡略のために関数 $f(t)$ について Divided difference $[t_1t_2\ldots t_n]$ の定義と初等的性質は既知のものとする。

I を開区間とする。このとき次の global な判定条件は早い時期に確立されている。f を十分に滑らかな関数とする。f がそうでないときには所謂 Regularization（[3],1 章 4 節）と呼ばれる手法で C^∞ 関数で近似出来るのでこのような仮定で議論は大体十分である．このことは又後の結果にもあてはまる。

I-(1): f が I 上で n-monotone であることと、Hankel 行列 $([t_it_j])$ が I の任意の n 点 $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ について半正定置になることとは同値である。

I-(2): f が n-convex であることと Hankel 行列 $([t_1t_it_j])$　が任意の n 点 $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ について半正定置になることは同値である。ここで最初の t_1 はどの t_k とでも置き換えてよい。

この結果に比べて次の局所的な判定条件の基礎は非常に不安定であった。

II-(1) f が n-monotone であることと, Hankel 行列関数

$$M_n(f:t) = \left(f^{i+j-1}(t)/(i+j-1)!\right)$$

が半正定置であることとは同値である。

この結果は Dobsch [2] によるものとみなされていたが、実際はそこで示されていたのは必要性のみで十分性は其の証明に必要な次の ” 局所性の定理 ” が Loewner-Dobsch の論文では（明らかとして）証明されていなかったので、その（非常に長く困難な）証明を付けた Donoghue の本 [3] が出るまでの 40 年間証明無しに人々に使われてきた。

[局所性の定理] $\alpha < \gamma < \beta < \delta$ に対して f が開区間 $\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ で n-monotone とすると、f は区間 (α, δ) で n-monotone になる。

この結果はその重要性からもっと単純な証明が求められているが、現在のところそれは知られていない。そして勿論 II-(1) が先に証明できれば局所性定理は明らかなわけであるが、それは証明の質から考えて望めないこととみられる。Convexity については II-(1) 対応する判定条件は次の II-(2) であると考えられるが、目下のところはそ の必要性のみが証明できる。

II-(2) f が I 上 n-convex であることと Hankel 行列関数

$$K_n(f:t) = \left(f^{i+j}(t)/(i+j)!\right)$$

が半正定置であることとは同値である。

しかし Convexity についての局所性定理は目下のところ以下に見られ様に $n=2$ のときのみしか分かってはいない。それでも上の結果に関連して得られる次の結果（I-(2) を使う）は Gap の存在の証明などについて重要である。

命題１．I のある点 t_0 で上の行列が正定置であれば、$\delta>0$ が存在して f は区間 $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ で n-convex である。

定理２ f を開区間 I 上のクラス C^4 でかつ任意の点において $f"(t)>0$ であるような関数とする。このとき次のことは同値である；

(1) f は 2-convex,

(2) 行列

$$\begin{pmatrix} f"(t)/2 & f^{(3)}(t)/6 \\ f^{(3)}(t)/6 & f^{(4)}(t)/24 \end{pmatrix} \geq 0$$

(3) f は正の concave function $c(t)$ によって

$$f"(t) = 1/c(t)^3$$

とかける、

ちなみに 2-monotone な関数については同様な条件の下で

$f'(t)=1/c(t)^2$ と書けるという characterization が知られておりこれによって $n=2$ のときは局所性定理は明らかになるが、一般の n ではこの様な結果は何も知られてはいないのがこの定理（Convexity もいれて）の証明を困難なものにしている。

定理２の証明は上の３つの主張のほかに、不等式

(4)

$$[t_0t_0t_0][t_1t_1t_1] \geq [t_0t_0t_1][t_0t_1t_1] \quad \forall t_0, t_1 \in I$$

を間にいれ、

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow I-(2) \Rightarrow (1)$$

の形で行うが、2-monotone の場合と比べてずっと複雑である。

3 Gap と Truncated moment problem

この節では $\{P_n(I)\},\{K_n(I)\}$ の列の gap の存在とそれらの中身を中心に議論する．任意の n についての $\{P_n(I)\}$ の差の問題は Donoghue の本も含めて殆どの論文でその存在が主張されているのにも拘わらず、[4] の論文まで 70 年間も僅かに n が 2 と 3 のときの例のみしか示されていなかったという事実は、理論の数学的な土台としては奇妙な現象である。単調関数については判定条件 I-(1),II-(1) があるにしても実際の判定は 3 次の行列でも非常に困難である．一方任意の n についての $\{K_n(I)\}$ の差の存在は今まで知られてはいなかった。

さて、$P_n(I)$ と $P_{n+1}(I)$ との間にある多項式の例は [4] での例をより深く考えるとその係数が truncated moment problem の解になっているものであった。このことをさらに追求することによって任意の n について $K_n(I)$ と $K_{n+1}(I)$ との差に入る関数の豊富な例を (また n-monotone についても) 組織的に作ることが出来る。ここで I,J が任意の 2 つの区間（ただし同じ形、開、半開等、等）のときこれらが共に有限であれば 1 次式で相互に入れ替われるので、単調性、凸性、また多項式の次数も変わりなく移せる。よって $P_n(I),K_n(I)$ の構造は区間 J についても "同じ" と見て良いであろう．しかし一方が有限で他方が無限区間の時（例えば $[0,1)$ と $[0,\infty)$ ）には移転関数 $h; J \to I,\ h^{-1}; I \to J$ がそれぞれ monotone-concave,monotone-convex な有理関数なので一概にこれらの構造が "同じ" とは言い難い。実際二つの場合は多項式のレベルで次のように大きく異なる。

定理３Ａ　I を無限区間とする。このとき
(1) $P_n(I)$ に含まれる多項式は高々一次式である、
(2) $K_n(I)$ に含まれる多項式は高々 2 次式である。

この結果の元になるのは $k \geq 2$ のとき t^k が 2-monotone にならないことと、$k \geq 3$ のときには t^k が 2-convex にならないことである。

定理３Ｂ　I を有限区間とする。このとき
(1) 次数が $2 \ \square\ deg(f) \ \square\ 2n-2$ の間の多項式は n-monotone とならない（$P_n(I)$ に入らない）．しかし任意の $m \geq 2n-1$ について m 次の n-monotone な多項式が存在する、
(2) 次数が $3 \ \square\ deg(f) \ \square\ 2n-1$ の間の多項式は n-convex にならない。しかし任意の $m \geq 2n$ について m 次の n-convex な多項式が存在する．

証明は前半については夫々単に、$2n-1, 2n$ 次の多項式は $P_{n+1}(I)$ に入らないこと、又 $2n, 2n+1$ の多項式は $K_{n+1}(I)$ に入らないことを示せば後は n の変化により上記のような次数の多項式は $P_n(I), K_n(I)$ の中に現われないことが導ける。そしてこれらの証明には [4] で用いられた論法を使えば良い。

後半の存在については

$$b_k = \int_0^1 t^k dt$$

とおき、多項式

$$f(t) = b_0 t + b_1 t^2 + \ldots + b_{m-1} t^m, \quad g(t) = b_0 t^2 + b_1 t^3 + \ldots + b_{m-2} t^m$$

を考えればこの形から

$$M_n(f:0) = K_n(g:0) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_{n-1} & b_n & \ldots & b_{2n-2} \end{pmatrix}$$

は正定置になることがわかり、更に行列要素の連続性より正の数 α が存在して $M_n(f:t), K_n(f:t)$ は区間 $[0,\alpha)$ 上で正定置で f, g はその上でそれぞれ n-monotone, n-convex になる。この議論から見られるように、係数 b_k の指定は実際は k が $2n-2$ まででよくあと必要なのは b_{m-1}, b_{m-2} がゼロでないことである。

以上の議論は必要な積分が収束する任意の測度 μ を用いても成立し、$P_n(I), K_n(I)$ に含まれる豊富な多項式の例が得られるが、本質的にはこれらに含まれる多項式はこのようなものに限るといえる。

注意；ここで $M_n(f:0), K_n(f:0)$ の正値性と μ の support が n 点以上を含むこととは同値であることが示せる．しかしこの条件がこわれたときは其の先の f, g の挙動は複雑である。

定理３Ｂから有限区間のときには $P_n(I)$ と $P_{n+1}(I)$ の差の多項式は $2n-1$ 次 $2n$ 次、又 $K_n(I)$ と $K_{n+1}(I)$ の差のそれは $2n, 2n+1$ 次の多項式類からなっていることがわかる。ここで単調関数については I が無限区間でも上の結果をそのまま変換の有理関数と結び合わせれば差の関数が得られるが、凸関数については前述のように其のまま議論は使えない．しかし

次のようにやはり Truncated moment problem を利用して Gap の存在の豊富な例を求めることが出来る．即ち、

"I が無限区間でも任意の n について $K_{n+1}(I)$ は $K_n(I)$ の proper subset である"。

それには有限区間 $[0,\alpha)$ 上で n-monotone, n-concave かつ $n+1$-monotone でない正の関数 f を求めれば良い。このとき関数 $g(t)=f(\alpha t/1+t)$ は区間 $[0,\infty)$ 上の n-concave で $n+1$-concave でない関数になる（この区間上では正の n-concave function は n-monotone になることを使う）。

求める関数の構成は

$$b_k=\int_{-1}^{0}t^k dt \quad (0 \square k \square 2n-1)$$

として

$$f(t)=c+b_0t+b_1t^2+\ldots+b_{2n-1}t^{2n}$$

とおけば、$\{b_k\}$ の定義から $M_n(f:0), K_n(f:0)$ はそれぞれ正定置、負定置、従って f はある区間 $[0,\alpha)$ 上で n-monotone, n-concave となる。そして f は其の次数から $n+1$-monotone にはならない。最後に定数 c を十分大きく取れば関数はこの区間では正になる.、

参考文献

[1] R.E.Curto and L.A.Fialkov, Recursiveness, positivity and truncated momento problem, Houston J.Math.,17(1991),603-635

[2] O.Dobsch, Matrixfunktionen beschränkter Schwankung, Math. Z., 43 (1937),353-388

[3] W.F.Donoghue,Monotone matrix functions and analytic continuation, Springer, 1974

[4] F.Hansen,G-X.Ji and J.Tomiyama, Gaps between classes of matrix monotone functions, Bull. London Math. Soc., 36(2004),53-58

[5] F.Hansen and J.Tomiyama, Differencial analysis of matrix convex functions, preprint

[6] H.Osaka,S.Silvestrov and J.Tomiyama, in preparation